

# 幾何的極限とエンディング・ラミネーション予想

相馬 輝彦 (首都大学東京 大学院理工学研究科)

近年における 3 次元多様体論で最も注目を集めたニュースは、Perelman よる 3 次元閉多様体の幾何化予想の解決である。一方、3 次元開多様体に関しても、ほとんど同時期に、Thurston [Th2] の問題集にある主要な予想 — 「Marden のチーム・エンド予想」と 「エンディング・ラミネーション予想<sup>1)</sup>」 — が相次いで解決した。

Marden のチーム・エンド予想は、Agol [Ag] と Gabai-Calegari [CG] によって独立に証明された。<sup>2)</sup> EL 予想のほうは、双曲 3 次元多様体がコンパクト曲面とホモトピー同値な場合、Minsky が [Mi1] 等の部分解を出したあと、Minsky [Mi2] と Brock-Canary-Minsky [BCM] によって肯定的に解決された。<sup>3)</sup>

$S$  を  $\chi(S) < 0$  をみたすコンパクトな連結曲面とする。境界  $\partial S$  の連結成分に対応する  $\pi_1(S)$  の要素を parabolic 要素に写すような離散忠実表現  $\rho: \pi_1(S) \rightarrow \mathrm{PSL}_2(\mathbb{C}) = \mathrm{Isom}^+(\mathbb{H}^3)$  を、Klein 表現ということにする。また、 $N_\rho = \mathbb{H}^3/\rho(\pi_1(S))$  とおく。このとき、EL 予想は次のように述べられる。

**定理 0.1** ([Mi2, BCM])  $N_\rho, N_{\rho'}$  を Klein 表現  $\rho, \rho': \pi_1(S) \rightarrow \mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})$  から決まる双曲多様体であり、同じエンド不変量  $\nu$  をもつとする。このとき、マーキングを保存する同相写像  $f: N_\rho \rightarrow N_{\rho'}$  は等長写像に固有ホモトピックである。

これらの華々しい結果が世間を騒がせていた頃、講演者はひっそりと擬フックス群の幾何的極限の研究を続けていた。成果として、擬フックス群の幾何的極限多様体の位相的分類が一応の完成をみた。その証明は、オーソドックスな双曲幾何的手法を使ったものであるが、明快なものではなかった。大鹿健一氏とのその後の共同研究 [OS] では、EL 予想の中核をなす「Bi-Lipschitz Model 定理」を主要な攻略手段に使い幾何的極限の研究を最初からやり直した。これによって、幾何的極限の位相的分類定理の証明が簡明になったばかりでなく、幾何的極限多様体に関する剛性定理も証明できた。しかし、Bi-Lipschitz Model 定理という強力な定理に頼りすぎたため、元の証明に比べてオリジナリティーの面で劣り、不満の残る結果となった。

---

日本数学会年会・トポロジー分科会特別講演 (於) 東京大学, 2009 年 3 月 26 日

<sup>1)</sup> 以下では、省略して EL 予想とかく。

<sup>2)</sup> 今にして想えば、Marden 予想の証明には難解な議論や奇抜なアイデアが必要だったわけではなく、Thurston [Th1], Bonahon [Bo], Canary [Can] 等による部分解がでた直後の 1990 年代前半に証明されてもよいものであった (Soma [Sol] 参照)。

<sup>3)</sup> 論文 [BCM] において、彼らはさらに  $\pi_1(N)$  が一般の有限生成群の場合も、この予想が正しいことを announce している。

最近になって、それまでとは逆に「幾何的極限」と「最小面積曲面論」という双曲幾何と3次元トポロジーの標準的手法を使って Bi-Lipschitz Model 定理を直観的に捉えやすい形で証明することができた。<sup>4)</sup> この結果は、Minsky 達の定理に対する「クロス・カウンター」と考えることができる。本講演の目標は、その証明の概略を紹介することにある（詳細は、[So2] を参照せよ）。幾何的極限を使った証明の利点としては、幾何的で分かり易いことや、その手法に汎用性があることなどがあげられる。例えばこの方法を使えば、Bi-Lipschitz Model 定理を、ピンチされた負曲率をもつ3次元開多様体に対しても成立するように一般化できるであろう。

## 1. 準備

- 記号と仮定 以下では、簡単のため  $S$  はつねに種数2以上の閉曲面であると仮定する。 $\mathcal{ML}(S)$  を  $S$  上の measured lamination 全体からなる空間とする（詳細は、[Th1, 第8章] 参照）。 $\mathcal{UMC}(S)$  は、同じ support  $|\mu|$  をもつ  $\mathcal{ML}(S)$  の要素  $\mu$  を同一視することによって得られる  $\mathcal{ML}(S)$  の商空間とする。また、 $\mathcal{EL}(S)$  を、 $F$  上の filling lamination からなる  $\mathcal{UMC}(S)$  の部分空間とする。ここで、 $|\mu| \in \mathcal{UMC}(S)$  が *filling* であるとは、任意の  $|\nu| \in \mathcal{UMC}(S)$  に対し、 $|\mu| = |\nu|$  であるか、 $|\mu|$  と  $|\nu|$  が横断的に交わることを意味する。Klein 表現  $\rho: \pi_1(S) \rightarrow \mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})$  から決まる双曲多様体  $N_\rho$  の  $\varepsilon$ -thin part,  $\varepsilon$ -thick part を、それぞれ  $N_{\rho(0,\varepsilon)}$ ,  $N_{\rho[\varepsilon,\infty)}$  であらわす。この講演ではつねに、 $N_\rho$  の両側のエンド  $e_\pm$  はいずれも単純退化であると仮定する。<sup>5)</sup> すなわち、エンド  $e_\pm$  の不変量  $\nu_\pm$  はどちらも  $\mathcal{EL}(S)$  の要素である。

- 幾何的極限  $(X, d)$  を距離空間とする。 $x \in X$  の  $R$ -近傍  $\mathcal{N}(x, R)$  を、 $\{y \in X; d(x, y) \leq R\}$  で定義する。基点  $x_n \in X_n$  をもつ完備距離空間の列  $\{X_n\}$  が、基点  $y_0 \in Y$  をもつ完備距離空間  $Y$  に幾何的に収束するとは、数列  $R_n \nearrow \infty$ ,  $K_n \searrow 1$  と  $K_n$ -bi-Lipschitz 写像  $f_n: \mathcal{N}_{R_n}(x_n, X_n) \rightarrow \mathcal{N}_{R_n}(y_0, Y)$  が存在することを意味する。このとき、 $(Y, y_0)$  を  $\{(X_n, x_n)\}$  の幾何的極限という。

次の例は、幾何的極限の議論を使って証明できるものであるが、EL 予想を証明する上で重要なのは次の事実である。

**例 1.1**  $F$  を連結なコンパクト曲面、 $N$  を3次元双曲多様体とする。 $F$  上の双曲構造  $\sigma$  で、 $F(\sigma)$  の境界成分がすべて長さ  $\varepsilon$  の閉測地線となるようなもの全体からなる Teichmüller 空間  $\mathrm{Teich}(F)$  の部分空間を  $\mathrm{Teich}_\varepsilon(F)$  とおく。 $f_i: F(\sigma_i) \rightarrow N_{[\varepsilon,\infty)}$  ( $i = 0, 1$ ) を  $\pi_1$ -単射な  $K$ -Lipschitz 写像で、 $N_{[\varepsilon,\infty)}$  において互いに固有ホモトピックなものとする。ただし、 $K \geq 1$ ,  $\sigma_i \in \mathrm{Teich}_\varepsilon(F)$  ( $i = 0, 1$ ) と仮定する。ホモトピー  $H: F \times [0, 1] \rightarrow N_{[\varepsilon,\infty)}$  と1点  $x \in F$  に対し、像  $H(\{x\} \times [0, 1])$  を  $f_0(F)$  と  $f_1(F)$  をつなぐホモトピー曲線とい

<sup>4)</sup> Bi-Lipschitz Model 定理のオリジナルの証明は、曲線グラフ上の tight geodesic のヒエラルキーを利用したものであるが、どちらかという技巧的で難解なものであり、講演者には理解できない。

<sup>5)</sup> EL 予想を考える上で、この場合が最も基本的であり、証明の主要部分を全て含んでいる。

う．このとき，幾何的極限の議論と Ascoli-Arzelà の定理を使うことによって， $\varepsilon, d_1, K$  と  $F$  の位相型のみによる定数  $d_0 > 0$  で次をみたすものが存在する．

「 $f_0(F)$  と  $f_1(F)$  をつなぐ長さ  $d_1$  以下のホモトピー曲線が存在すれば， $\sigma_0$  と  $\sigma_1$  の  $\text{Teich}_\varepsilon(F)$  における距離は  $d_0$  以下である．」

幾何的極限の議論は背理法を使うので， $d_0$  のような定数を上から評価できないという欠点がある．しかし双曲多様体論では「証明の鍵となる定数が（どんなに大きな数でもかまわないから）存在する」という事実のみが必要で，その値が結論に全く影響しないということはよくある．第 4 節で紹介する「Bi-Lipschitz Model 定理  $\implies$  EL 予想」の証明はその好例である．このことから，双曲幾何学と幾何的極限は非常に相性が良いことが分かる．

## 2. 曲線グラフと tight geodesic

この節では，EL 予想の証明では必須である曲線グラフについて説明する．この概念は，Harvey [Har] によって導入され，[MM1, MM2] 等で改良されたものである．

コンパクト曲面  $F$  の種数を  $g$ ，境界の連結成分の個数を  $p$  とするとき， $F$  の複雑さが  $\xi(F) = 3g + p - 3$  で定義される． $\xi(F)$  は， $F$  に含まれる互いに疎かつホモトピックでない本質的曲線の個数の最大値と一致する.<sup>6)</sup>

$\xi(F) > 1$  のとき， $F$  の曲線グラフ (curve graph)  $\mathcal{C}(F)$  とは， $F$  内の本質的曲線のホモトピー類を頂点，互いに疎な代表をもつ頂点对を辺とする単体的グラフのことである． $\mathcal{C}(F)$  の頂点を，単に曲線 (curve) という． $\xi(F) = 1$  のときは，2 つの曲線  $u, v$  が  $\mathcal{C}(F)$  の 1 辺の端点になるのは，幾何的交叉数  $i(u, v)$  が最小になるときであると定義する．すなわち， $F$  が 1 点穴あきトーラスならば  $i(u, v) = 1$  のとき，4 点穴あき球面ならば  $i(u, v) = 2$  のとき， $\mathcal{C}(F)$  は  $u, v$  を端点とする辺をもつ． $\mathcal{C}(F)$  上の計量  $d$  を，各辺が長さ 1 の閉区間と等長的になるように定義する． $k + 1$  個の点からなる  $\mathcal{C}(F)$  の部分集合  $v = \{w_0, w_1, \dots, w_k\}$  は，互いに疎な代表元をもつとき  $k$ -単体であるという．

$\mathcal{C}(F)$  の長所は，距離空間としてグロモフ双曲的なことである ([MM1, Bow1] 参照)．さらに，グロモフ双曲的空間としての  $\mathcal{C}(F)$  の境界  $\partial\mathcal{C}(F)$  は，第 1 節で定義した  $UM\mathcal{L}(F)$  の部分空間  $\mathcal{EL}(F)$  と同一視できることも知られている．

一方， $\mathcal{C}(F)$  の短所と考えられるのは，局所有限ではないことである．その欠点を補うため tight geodesic という概念が導入された． $\mathcal{C}(F)$  の単体の列  $\{v_i\}_{i \in I}$  は次の条件をみたすとき tight geodesic とよばれる．ただし， $I$  は  $\mathbb{Z}$  の有限または無限区間とする．

- $\xi(F) > 1$  のときは， $v_i$  の任意の頂点  $w_i$  と  $v_j$  の任意の頂点  $w_j$  ( $i \neq j$ ) に対し， $d(w_i, w_j) = |i - j|$  が成り立つ．さらに， $\{i - 1, i, i + 1\} \subset I$  に対し， $v_i = \partial F_{i-1}^{i+1}$  となる．ここで， $F_{i-1}^{i+1}$  は  $v_{i-1} \cup v_{i+1}$  を含み測地的境界をもつ  $F$  の最小部分曲面

<sup>6)</sup>  $F$  内の曲線  $v$  が本質的であるとは， $v$  が  $F$  において非可縮な単純閉曲線で， $\partial F$  の連結成分にはホモトピックではないこという．

とする (図 2.1 参照) . ただし,  $\inf I = i_0 > -\infty$  のときは,  $v_{i_0}$  は唯一つの頂点からなるとする .  $\sup I = i_0 < +\infty$  のときも同様である .

- $\xi(F) = 1$  のときは,  $\{v_i\}$  は  $\mathcal{C}(F)$  の頂点集合  $\mathcal{C}_0(F)$  における通常の測地線である .

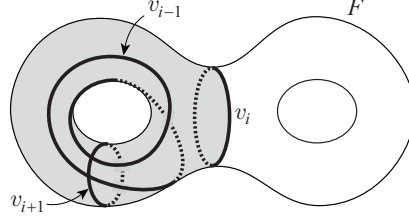


図 2.1 Tight geodesic の連続 3 成分  $v_{i-1}, v_i, v_{i+1}$ . グレーの部分が  $F_{i-1}^{i+1}$  である .

$\mathcal{C}(F) \cup \mathcal{EL}(F)$  の任意の 2 点を端点にもつ tight geodesic の存在は, [MM2, Mi2] で証明された .

### 3. Tight geodesic のヒエラルキーと brick 多様体

第 1 節で仮定したように,  $N_\rho$  のエンド不変量  $\nu = (\nu_-, \nu_+)$  は,  $\mathcal{EL}(S)$  の要素からなる . EL 予想を証明する上で, 重要なのは双曲多様体と bi-Lipschitz 同値になるようなモデル多様体を構成することである . ここでは, それを brick 多様体とよぶことにする . [Mi2] では, モデル多様体は, 次のようなプロセスで構成された .

(1) 曲線グラフ内のヒエラルキーの定義, (2) エンド不変量  $\nu$  に同伴するヒエラルキー  $H_\nu$  の存在, (3)  $H_\nu$  の slice の定義, (4) slice を含む resolution の存在証明, (5) この resolution を使って, モデル多様体  $M_\nu$  を  $S \times \mathbf{R}$  の部分空間として実現 .

この節では, ヒエラルキーを  $S \times \mathbf{R}$  の幾何学的対象として定義することによって, モデル多様体を直接構成する . この方法は, [Bow3] のアイデアを基礎としている .

$g = \{v_i\}_{i=-\infty}^{\infty}$  を  $\nu_-$  と  $\nu_+$  を端点にもつ  $\mathcal{C}(S)$  内の tight geodesic とする . この測地線  $g$  を  $S \times \mathbf{R}$  の中の幾何学的対象として実現してみよう .  $\xi(S) > 1$  のときは,  $\overline{U}(v_i) = A(v_i) \times [i, i+1]$  とおくと,  $\{\overline{U}(v_i)\}$  は  $S \times \mathbf{R}$  内の互いに疎な垂直トラス体の集合となる . ただし,  $A(v_i)$  は  $S$  における  $v_i$  の正則近傍である . 開トラス体  $\text{Int}\overline{U}(v_i)$  を,  $U(v_i)$  とおく .  $S \setminus \text{Int}A(v_i)$  の連結成分  $F$  に対し,  $B = F \times [i, i+1]$  を垂直境界が  $\partial U(v_i)$  に含まれる brick という . また,  $F \cap v_{i-1} \neq \emptyset, F \cap v_{i+1} \neq \emptyset$  のときは,  $F \cap v_{i-1} \neq \emptyset$  のある頂点  $w_{i-1}$  と  $F \cap v_{i+1} \neq \emptyset$  のある頂点  $w_{i+1}$  を端点にもつ  $F$  内の tight geodesic  $g_B = \{x_j\}_{j \in J}$  を考える .  $g_B$  もまた  $B$  内の垂直トラス体の集合として実現することができる . ただし  $\xi(F) = 1$  のとき, この定義のままだと  $\overline{U}(x_j)$  と  $\overline{U}(x_{j+1})$  は交わることになる . そのときは,  $U(x_j)$  と  $U(x_{j+1})$  の間に  $F \times [a, b]$  型の brick を挿むことにより,  $\overline{U}(x_j) \cap \overline{U}(x_{j+1}) = \emptyset$  となるようにする . この操作を繰り返すことにより, 互いに疎な

無限個の開トーラス体の和集合  $U$  が  $S \times \mathbf{R}$  内に実現でき、各 brick 内の水平曲面  $F$  に対し、 $\xi(F) = 0$  または  $\xi(F) = 1$  となるようにできる (図 3.1 参照) .  $S \times \mathbf{R} \setminus U$  内の極大

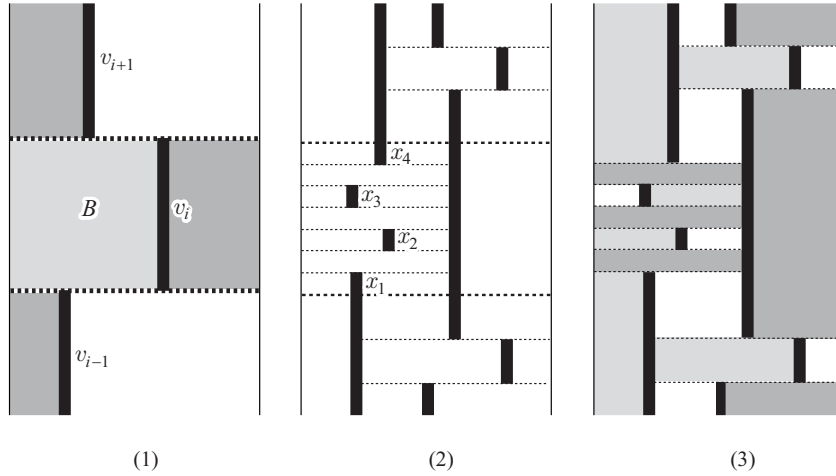


図 3.1 (1) 開トーラス体  $\dots, U(v_{i-1}), U(v_i), U(v_{i+1}), \dots$  によって定義される  $S \times \mathbf{R}$  の第 1 段階の brick 分解 . ラベル  $v_k$  のついた垂直線分は  $U(v_k)$  をあらわす .  $B$  を  $\xi(F) = 1$  となる brick とする . よって (2) にあるように、 $B$  内の開トーラス体  $U(x_j)$  の間には brick が挿まれている . (3) は、(1) と (2) の開トーラス体によって定義される  $S \times \mathbf{R}$  の第 2 段階の brick 分解 .

直積空間  $B$  は、 $\xi(F) \in \{0, 1\}$  をみたま  $S$  のコンパクト部分曲面  $F$  と閉区間  $I$  との直積  $F \times I$  の形になる . これらを、 $(S \times \mathbf{R}, U)$  に関する *block* という . すなわち、*block* とは、brick の最小単位である .  $\xi(F) \in \{0, 1\}$  であるから、 $F$  は 3 点穴あき球面  $\Sigma_{0,3}$ , 4 点穴あき球面  $\Sigma_{0,4}$ , 1 点穴あきトーラス  $\Sigma_{1,1}$  のいずれかになる .  $\Sigma_{0,3} \times [0, 1]$ ,  $\Sigma_{0,4} \times [0, 1]$ ,  $\Sigma_{1,1} \times [0, 1]$  上の計量を決めておき、各 *block*  $B$  にはこれらの内の一つと等長的になるような計量を入れる . 2 つの *block*  $B, B'$  が交わるとき、 $C = B \cap B'$  は 3 点穴あき球面である (図 3.2 (a) 参照) . 上記 3 種類の基準計量を適切に決めておけば、 $B$  と  $B'$  の貼り付け写像をアイソトピーで変形することによって、 $B$  上の計量と  $B'$  上の計量が  $C$  上で一致するようになる . したがって、 $S \times \mathbf{R} \setminus U$  上に区分的なリーマン計量からなる距離が定義できる . さらに、 $U$  の各連結成分  $U$  に対し、 $\partial U$  上に制限された計量は、測地的ロンジチュードの長さが一定値  $\varepsilon$  となるユークリッド構造をもつようにできる . このような計量が定義された  $S \times \mathbf{R} \setminus U$  を  $M_\nu[0]$  であらわす . 図 3.2 (b) のようにして、 $\partial U$  上の計量から、 $U$  のメリディアン係数 (meridian coefficient)  $\omega(U)$  が決まる . 任意の自然数  $k$  に対し、 $|\omega(U)| \geq k$  をみたま  $U$  の連結成分  $U$  全体の和集合を  $U[k]$  とする . 以下、 $M_\nu[k] = M_\nu[0] \cup (U \setminus U[k])$  とおく . すなわち、 $M_\nu[k] = S \times \mathbf{R} \setminus U[k]$  である .  $U$  の各連結成分  $U$  上には、 $\partial U$  上のユークリッド計量を拡張するような双曲管状構造が一意的に定義されるので、 $M_\nu[0]$  上の計量も  $M_\nu[k]$  上の計量に一意的に拡張される .

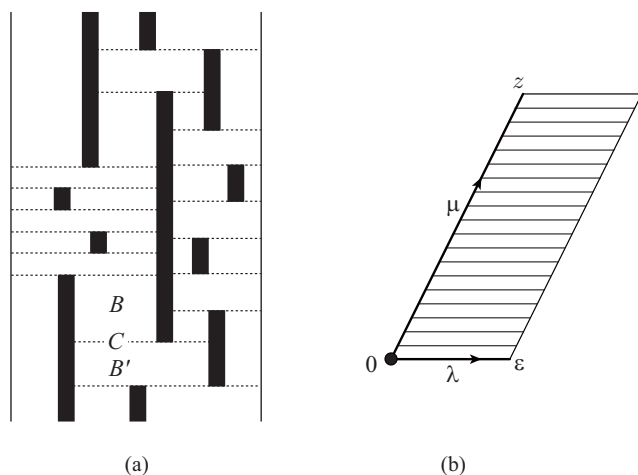


図 3.2 (a)  $S \times \mathbf{R}$  中の  $U$ . (b) 図は、 $\mathbf{E}^2 = \mathbf{C}$  上に実現された  $\partial U$  の基本領域.  $\mu, \lambda$  は、それぞれ  $U$  のメリディアン、ロンジチュードを表す. このとき、メリディアン係数  $\omega(U)$  は  $z/\varepsilon$  で定義される.

#### 4. Lipschitz Model, Bi-Lipschitz Model 定理と EL 予想

EL 予想の証明は、Lipschitz Model 定理 [Mi2] と Bi-Lipschitz Model 定理 [BCM] からなる.

定理 4.1 (Lipschitz Model 定理 [Mi2])  $\pi_1(f) = \rho, \deg(f) = 1$  となる固有ホモトピー同値写像  $f: S \times \mathbf{R} \rightarrow N_\rho$  で、次の条件をみたすものが存在する. ただし、 $K \geq 1, k \in \mathbf{N}$  は  $\nu, \rho$  とは独立な定数である.

- $\nu, \rho$  とは独立な定数  $0 < \varepsilon_2 < \varepsilon_1$  が存在し、像  $\mathbb{T}[k] = f(U[k])$  の各連結成分は  $N_{\rho(0, \varepsilon_1)}$  の連結成分であり、 $\mathbb{T}[k] \supset N_{\rho(0, \varepsilon_2)}$  となる. さらに  $f|_{U[k]}: U[k] \rightarrow \mathbb{T}[k]$  は、 $U[k]$  の連結成分と  $\mathbb{T}[k]$  の連結成分の間の全単射を定義する.
- $f(M_\nu[k]) = N_\rho[k]$  であり、 $f|_{M_\nu[k]}: M_\nu[k] \rightarrow N_\rho[k]$  は  $K$ -Lipschitz 写像である. ただし、 $N_\rho[k] = N_\rho \setminus \mathbb{T}[k]$  とする.

定理 4.1 の証明で、重要な役割をはたすのが曲線グラフのグロモフ双曲性とアプリアリ上界補題 ([Mi2, 補題 7.9]) である. この補題は、 $l$  を  $U$  の連結成分  $U$  のコアとすると、 $f(l)$  とホモトピックな  $N_\rho$  内の測地線の長さが一様有界であることを主張するものである. Bowditch [Bow2] により、この補題の幾何的な別証明がでた. 彼の証明は、幾何的極限の議論を途中まで利用したものである. 彼は、その議論を最後まで使わなかった理由として、幾何的極限多様体の位相型が非常に複雑なことをあげている. しかし、位相型が複雑なことは大して問題ではなく、重要なのは幾何的極限が存在すること自体である. その後 Soma [So3] によって、幾何的極限そのものを利用した証明が与えられた. 定理 4.1 の他の部分は、双曲幾何の標準的議論を使って証明できる.

Lipschitz Model 定理をさらに進化させたのが次の定理である．

**定理 4.2 (Bi-Lipschitz Model 定理 [BCM])** 写像  $f$  を定理 4.1 で得られた Lipschitz 写像とする．このとき  $\nu, \rho$  とは独立な定数  $K' \geq 1$  が存在して，制限  $f|_{M_\nu[k]}$  は  $K'$ -bi-Lipschitz 写像  $\varphi : M_\nu[k] \rightarrow N_\rho[k]$  に固有ホモトピックである．

「Bi-Lipschitz Model 定理  $\implies$  EL 予想」の証明．第 1 節で仮定したように， $N_\rho$  の両方のエンドが単純退化な場合のみを考える．定理 4.2 より，brick 多様体  $M_\nu[k]$  を経由する  $K'^2$ -bi-Lipschitz 写像  $\varphi' \circ \varphi^{-1} : N_\rho[k] \rightarrow N_{\rho'}[k]$  が存在する．標準的な双曲幾何の議論を使って，この写像が bi-Lipschitz 写像  $\Phi : N_\rho \rightarrow N_{\rho'}$  に拡張できることを示すのはそれほど難しいことではない ([BCM, Lemma 8.5], [Bow3, Lemma 5.8] 参照)． $\Phi$  は，普遍被覆空間間の同変な bi-Lipschitz 写像  $\tilde{\Phi} : \mathbb{H}^3 \rightarrow \mathbb{H}^3$  にリフトされる．さらに  $\tilde{\Phi}$  は，擬等角写像  $\tilde{\Phi}_\partial : \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$  に拡張される．Sullivan [Su] の剛性定理より， $\tilde{\Phi}_\partial$  は等角写像であることがわかる．したがって， $\tilde{\Phi}_\partial$  は同変な等長写像  $\tilde{\Psi} : \mathbb{H}^3 \rightarrow \mathbb{H}^3$  に拡張される． $\tilde{\Psi}$  が被覆する写像  $\psi : N_\rho \rightarrow N_{\rho'}$  は， $f$  に固有ホモトピックな等長写像である．（証明終）

## 5. Bi-Lipschitz Model 定理への幾何的アプローチ

本節では，[So2] による Bi-Lipschitz Model 定理の別証明を紹介する.<sup>7)</sup> この証明は，[Bow3] の考えを基礎にしたものであり，本質的に使われているのは幾何的極限の議論と [FHS] による最小面積曲面論である．

Bi-Lipschitz Model 定理の証明の概略．定理 4.1 で得られた  $K$ -Lipschitz 写像  $f|_{M_\nu[k]}$  を  $f_0$  とおく． $M_\nu[k]$  の brick 分解  $\mathcal{K}$  を考える．すなわち  $\mathcal{K}$  の要素  $B$  は， $M_\nu[k]$  内の互いに平行な horizontal surface の和集合であり，その垂直境界が  $\partial U[k]$  に含まれるものの中で極大なものとする． $B, B' \in \mathcal{K}$  に対し， $J = B \cap B' \neq \emptyset$  のとき，この共通部分を  $B$  と  $B'$  の joint という (図 5.1 参照)． $\mathcal{J}$  を joint 全体の集合とする．このとき，[FHS] の議論を利用すると，各  $J \in \mathcal{J}$  に対し， $f_0|_J$  の  $N_\rho[k]$  における自由ホモトピー類には最小面積曲面が存在し，それが埋め込みであることが証明できる (自由境界問題)．この事実を使って， $f_0$  に固有ホモトピックな写像  $f_1 : M_\nu[k] \rightarrow N_\rho[k]$  で，制限写像  $f_1|_{\cup \mathcal{J}}$  が埋め込みとなるものが定義できる．後は，基本的な 3 次元トポロジーの議論により， $f_1$  は同相写像  $f_2$  に固有ホモトピックであることが証明できる．しかし，この  $f_2$  が Lipschitz 写像である保証はない．

次に，元の写像  $f_0$  の境界への制限  $\alpha_0 = f_0|_{\partial U[k]} : \partial U[k] \rightarrow \partial \mathbb{T}[k]$  を考える．このとき，例 1.1 にあるような幾何的極限の議論を使うことにより， $\alpha_0$  は bi-Lipschitz 写

<sup>7)</sup> 実際には，[Mi2] が定義した  $M_\nu[k]$  上の計量を少し変更しているが，その新しい計量もエンド不変量  $\nu$  のみで決まり，表現  $\rho$  にはよらない．

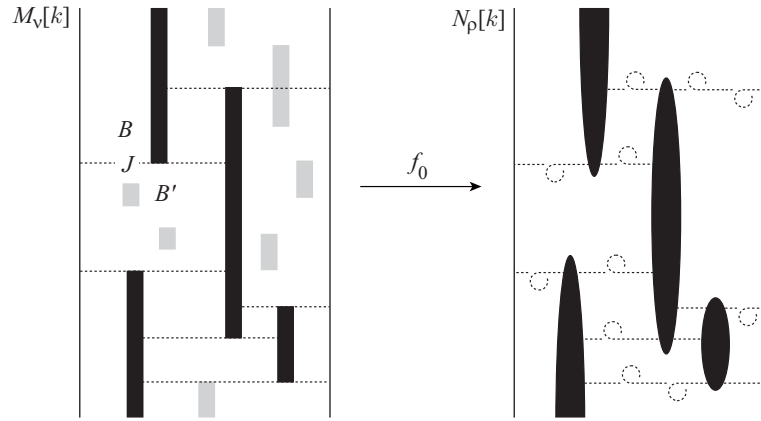


図 5.1 左半分の黒い部分は  $U[k]$  をあらわし，グレーの部分は  $U \setminus U[k]$  をあらわす（図 3.2 (a) と比較せよ）．右半分の黒い部分は  $T[k]$  をあらわす．

像  $\alpha_1 : \partial U[k] \rightarrow \partial T[k]$  にホモトピックであることが証明できる．さらに  $\alpha_0$  から  $\alpha_1$  へのホモトピーの移動距離は一様に有界であるようにできる．したがって，ある定数  $L \geq K$  に対し， $K$ -Lipschitz 写像  $f_0$  を固有ホモトピーで変形した  $L$ -Lipschitz 写像  $g_0$  で  $g_0|_{\partial U[k]} = \alpha_1$  であるものが構成できる． $g_0$  が同相写像  $f_2$  に固有ホモトピックであるという事実から， $g_0$  は  $g_0|_{\partial U[k]} = \alpha_1$  を動かさず同相写像にホモトピックにできる．今度は，各 joint  $J \in \mathcal{J}$  に対して， $g_0|_J$  の境界を固定したホモトピークラスにおける最小面積曲面  $F_J$  を考える（固定境界問題）． $F_J$  もまた埋め込みであり，その面積は  $L^2 C$  以下である．ただし， $C = C(k, S)$  は  $M_\nu[k]$  における horizontal surface の面積の上限である．さらに， $F_J \subset N_{\rho[\varepsilon_2, \infty)}$  であるから， $F_J$  は  $\varepsilon_2$ -細部をもたない．これから， $F_J$  の直径も一様に有界であることも分かる．したがって， $g_0$  に固有ホモトピックな Lipschitz 写像  $g_1 : M_\nu[k] \rightarrow N_\rho[k]$  で  $g_1|_J$  が  $F_J$  の上への bi-Lipschitz 埋め込みであるものが存在する． $g_1|_{J \cup \partial U[k]}$  を拡張する bi-Lipschitz 写像  $\varphi : M_\nu[k] \rightarrow N_\rho[k]$  を構成するのはそれほど難しいことではない.<sup>8)</sup>

最後に，ここに現れる Lipschitz 定数は全て  $\mu, \rho$  にはよらない一様定数であることを注意しておく．

## 参考文献

- [Ag] I. Agol, Tameness of hyperbolic 3-manifolds, arXiv:math.DG/0405568.  
 [Bo] F. Bonahon, Bouts des variétés hyperboliques de dimension 3, Ann. of Math. **124** (1986) 71-158.

<sup>8)</sup>ただし， $g_1|_{J \cup \partial U[k]}$  を  $\partial U[k]$  と交わらない brick 上に拡張するときは，再度例 1.1 の結果を使う必要がある．



- [Bow1] B. Bowditch, Intersection numbers and the hyperbolicity of the curve complex, *J. Reine Angew. Math.* **598** (2006) 105-129.
- [Bow2] B. Bowditch, Length bounds on curves arising from tight geodesics, *Geom. Funct. Anal.* **17** (2007) 1001-1042.
- [Bow3] B. Bowditch, Geometric models for hyperbolic 3-manifolds, preprint (2006).
- [BCM] J. Brock, R. Canary and Y. Minsky, The classification of Kleinian surface groups, II: The Ending Lamination Conjecture, E-print math.GT/0412006.
- [CG] D. Calegari and D. Gabai, Shrinkwrapping and the taming of hyperbolic 3-manifolds, *J. Amer. Math. Soc.* **19** (2006) 385-446.
- [Can] R. Canary, Ends of hyperbolic 3-manifolds, *J. Amer. Math. Soc.* **6** (1993) 1-35.
- [FHS] M. Freedman, J. Hass and P. Scott, Least area incompressible surfaces in 3-manifolds, *Invent. Math.* **71** (1983) 609-642.
- [Har] W. Harvey, Boundary structure of the modular group, Riemann surfaces and related topics: Proceedings of the 1978 Stony Brook Conference (State Univ. New York, Stony Brook, N.Y., 1978), pp. 245-251, *Ann. of Math. Studies No. 97*, Princeton Univ. Press, Princeton, N.J. 1981. *Scad.* **66** (1990) 47-72.
- [MM1] H. Masur and Y. Minsky, Geometry of the complex of curves, I: Hyperbolicity, *Invent. Math.* **138** (1999) 103-149.
- [MM2] H. Masur and Y. Minsky, Geometry of the complex of curves, II: Hierarchical structure., *Geom. Funct. Anal.* **10** (2000) 902-974.
- [Mi1] Y. Minsky, Bounded geometry for Kleinian groups, *Invent. Math.* **146** (2001) 143-192.
- [Mi2] Y. Minsky, The classification of Kleinian surface groups I: models and bounds, *Ann. of Math.* (to appear).
- [OS] K. Ohshika and T. Soma, Geometry and topology of geometric limits I, preprint.
- [So1] T. Soma, Existence of ruled wrappings in hyperbolic 3-manifolds, *Geom. Topol.* **10** (2006) 1173-1184.
- [So2] T. Soma, Geometric approach to Ending Lamination Conjecture, E-print arXiv:0801.4236.
- [So3] T. Soma, Geometric limits and length bounds on curves, preprint.
- [Su] D. Sullivan, On the ergodic theory at infinity of an arbitrary discrete group of hyperbolic motions, Riemann surfaces and related topics, Proceedings of the 1978 Stony Brook Conference (State Univ. New York, Stony Brook, N.Y., 1978), pp. 465-496, *Ann. of Math. Stud.*, 97, Princeton Univ. Press, Princeton, N.J. (1981).
- [Th1] W. Thurston, The geometry and topology of 3-manifolds, Lecture Notes, Princeton Univ., Princeton (1978), on line at <http://www.msri.org/publications/books/gt3m/>.
- [Th2] W. Thurston, Three dimensional manifolds, Kleinian groups and hyperbolic geometry, *Bull. Amer. Math. Soc.* **6** (1982) 357-381.