

結び目のトポロジー

首都大学東京 大学院理工学研究科

相馬 輝彦

1 結び目・絡み目の正則図式と基本変形 (ライデマイスター移動)

1.1 結び目と絡み目

3次元ユークリッド空間 \mathbb{R}^3 内の滑らかな単純閉曲線 K を結び目 (knot) という。閉曲線とは、簡単に言えば閉じたひものことであり、それが単純であるとは、その閉曲線が自己交叉を持たないことをいう。また、閉曲線が滑らかであるとは、 K の各点で接線が存在し、その接線が K に沿って連続的に変化することを意味する。

図 1.1 は結び目の例である。 O を自明な結び目、 K_{TR} を (左手型) 三葉結び目、 K_{F8} を 8 の字結び目という。

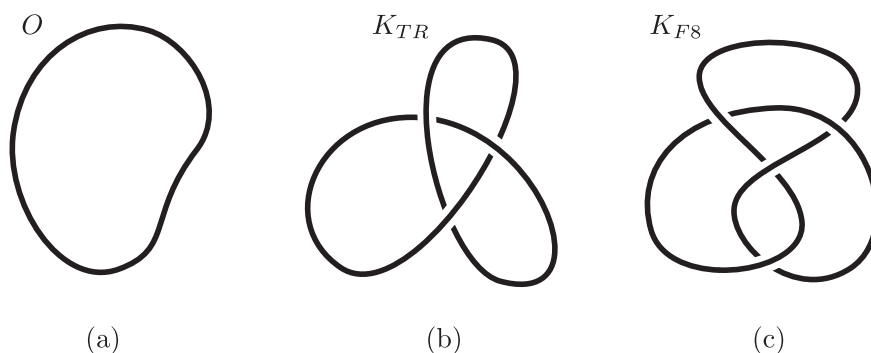


図 1.1

互いに共通部分を持たない有限個の結び目の和集合を絡み目 (link) という。絡み目 L が n 個の結び目からなるとき、 L を n 成分絡み目という。したがって、結び目は 1 成分絡み目である。図 1.2 は、2 成分絡み目の例である。 L_1 をホップ絡み目、 L_2 をホワイトヘッド絡み目という。

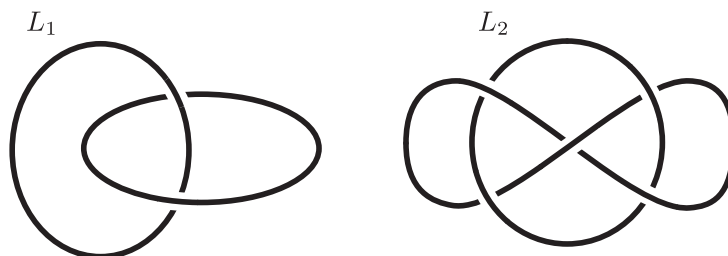


図 1.2

結び目 (絡み目) を、伸縮自在な 1 本 (何本か) のひもでできた輪と考え、空間内で動かし、捩ったり縮めたり伸ばしたりして形を変えることを同値変形という。2 つの結び目の一方 K を同値変形し

て、他方の結び目 K' に一致させることができるとき、 K と K' は同値であるといい、これを $K \cong K'$ と表す。同様に、2つの絡み目の一方 L を同値変形して、他方の絡み目 L' に一致させることができるとき、 L と L' は同値であるといい、これも $L \cong L'$ と表す。

xyz 空間 \mathbb{R}^3 内の xy 平面を \mathbb{R}^2 とする。 \mathbb{R}^2 内の単純閉曲線と同値な結び目を、自明な結び目といい、これを O で表す。 \mathbb{R}^2 内の互いに交叉しない n 本の単純閉曲線と同値な絡み目を、自明な n 成分絡み目といい、これを O_n で表す。特に、 $O_1 = O$ である。

注意 1.1. 図 1.1(a) は自明な結び目である。図 1.1(b), (c) の結び目（三葉結び目、8 の字結び目）は、直観的には自明ではないように見える。本講義では、これら3つの結び目が互いに同値でないという主張を、数学的な意味で厳密に証明する（例 4.2, 問題 4.1 page 14）。また、「ホップ絡み目は外れるか?」（図 1.3 上）、「左手型三葉結び目 K_{TR} とその鏡映（右手型三葉結び目） K_{TR}^* は同値であるか?」（図 1.3 下）という問題にも厳密な解答を与える。ホップ絡み目は外れないことは直観的には自明であるが、これを数学的に証明するにはどうしたらよいか。その解答は、注意 2.7(2) (page 8) で与えられる。第2の問題の答えは、「 K_{TR} と K_{TR}^* は同値でない」であるが、数学的な証明が与えられなければ、自信を持って正しいとは言えきれないかもしれない。これは、問題 4.2 (page 16) で明らかになる。

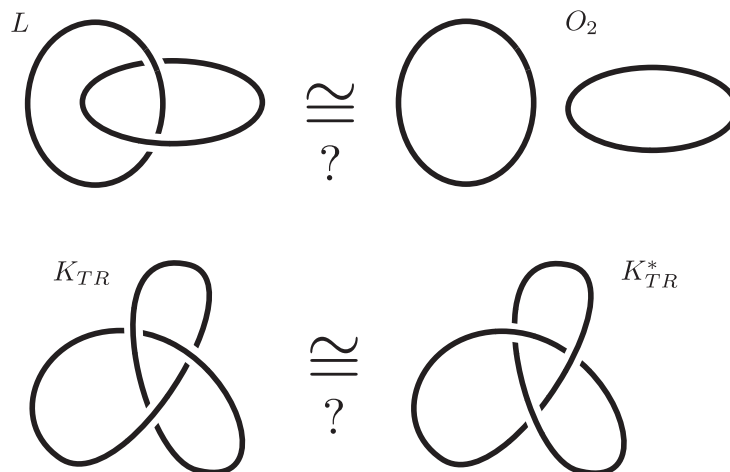


図 1.3

1.2 正則図式と基本変形（ライデマイスター移動）

結び目は、3次元空間に浮いている図形であり、そのままでは扱い難い。研究・学習の結果は何からの形で記録する必要があるが、対象が3次元空間内にあるときは、3Dカメラや3Dディスプレイが必要となる。また、3次元の対象からどうやって不変量を抽出するのも難しい問題である。そこで、結び目を xy 平面 \mathbb{R}^2 に射影して、2次元の図形として調べることにする。結び目理論では、次の条件をみだす射影図のみを考える。

- (1) 交差点の個数は有限個である。
- (2) 交差点では、2辺のみが交差し、3辺以上が交差することはない。

ここで問題なのは、射影された図では高さの情報が失われるので、同値でない結び目が同じ射影図を持つ場合も出てくることである。実際、図 1.4 は自明な結び目 O と非自明な結び目 K (三葉結び目) が同じ射影図を持つように、3次元空間内に配置できることを示している。そこで、結び目・絡

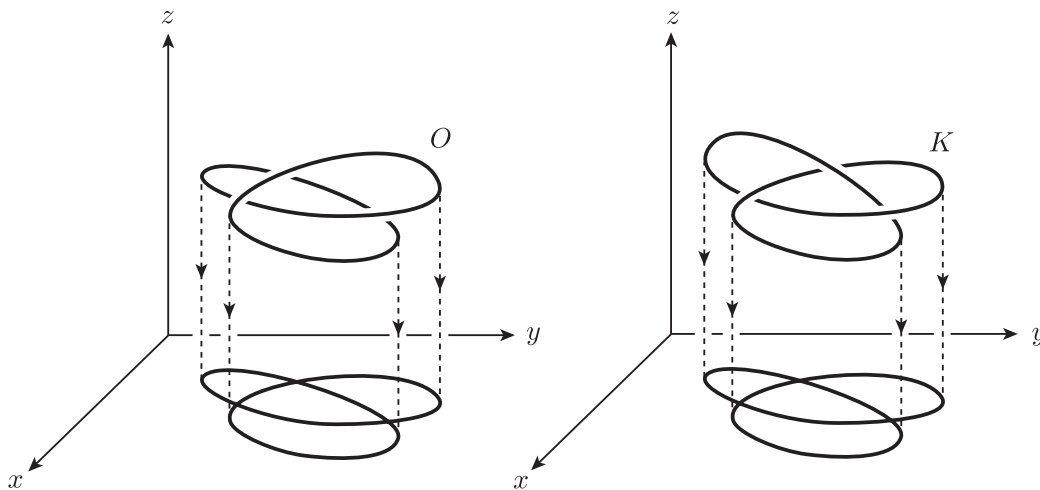


図 1.4

み目の射影図に、上交差点、下交差点の情報を加えたものを考える。これを、正則図式という。

図 1.5 は、図 1.4 の射影図を正則図式に取り替えたものである。以下では、結び目・絡み目とその

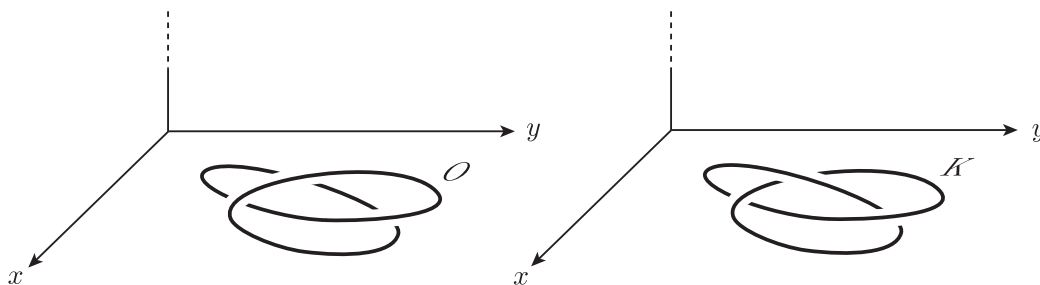


図 1.5

正則図式を同じ記号で表すことにする。

正則図式を、交差点を出現させたり、消滅させたりすることなく、同値変形することを、単純変形という。直観的には、平面を伸縮自在な薄い膜と見なし、その上に描いた正則図式を伸び縮みさせて変形することをいう。単純変形は図形の整形であり、交差点の個数やその上下関係または交差点同士をつながり方のような「トポロジー的」性質は不変である。

結び目の研究において本質的に重要な正則図式の変形を定義する。正則図式間の次の 3 種類の局所変形を、基本変形またはライデマイスター移動という。ここで局所変形とは、正則図式のある箇所にスポットをあて、その内部でのみ変形を行い、外部は全く動かさないことを意味する。

次の定理は、結び目理論において基本的な役割をはたすものである。

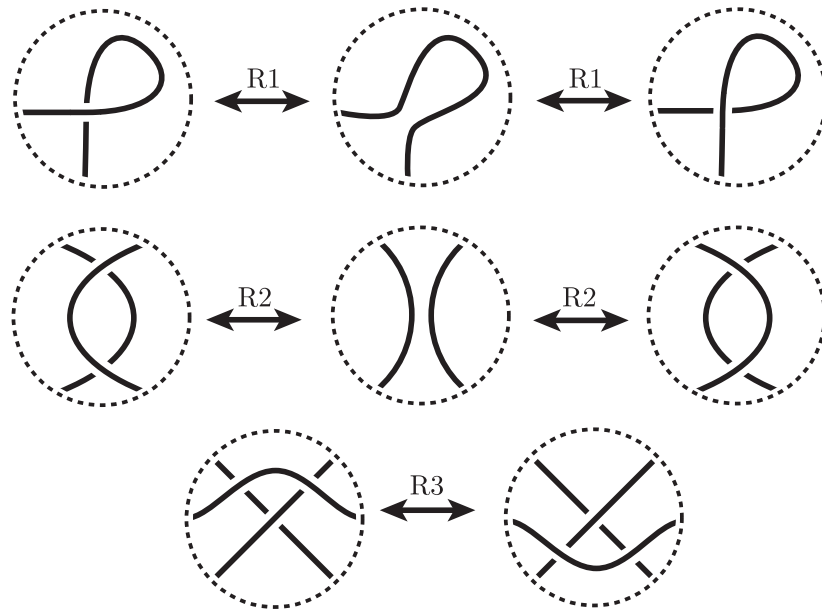


図 1.6

定理 1.2 (同値定理). 2つの絡み目 L, L' が同値である ($L \cong L'$) ための, 必要十分条件は, L の正則図式に有限回の単純変形と基本変形を繰り返すことによって, L' の正則図式が得られることである.

同値定理を, アニメーションを例にとって説明する. アニメーション映画に登場するキャラクターは変幻自在の動きをする. しかし, その映画フィルムの一コマ一コマの変化は非常に単純なものである. それと同様に, 同値変形で絡み目をどんなに複雑に動かしても, その運動を細かく分割すると, 一つ一つの変化は, 本質的に基本変形だけであるというのが, 同値定理の主張である.

講義で, 定理 1.2 の証明の概略を与える.

同値定理の厳密な証明は, 村杉邦男 著「結び目理論とその応用」日本評論社 (1993) の定理 4.1.1 (p. 42) にある.

例 1.3. 図 1.7 は, 結び目 K の正則図式から, 単純変形と基本変形によって自己交叉をもたない円周 O が得られることを示している. 特に, $K \cong O$ であるから, K は自明な結び目である. より複雑な単純変形と基本変形の組み合わせによる同値変形の例が, p. 15, 図 4.3 にある.

2 有向絡み目と絡み数

2.1 有向絡み目

L を, 成分 K_1, \dots, K_n をもつ絡み目とする. これを, $L = K_1 \cup \dots \cup K_n$ と表す. 各 K_i に一周する方向を定めたものを, 有向絡み目という. 特に, L が結び目のとき (すなわち, $L = K_1$ のとき) は, 有向結び目という. n 成分絡み目をもつ n 成分絡み目の向きの付け方は 2^n 通りある.

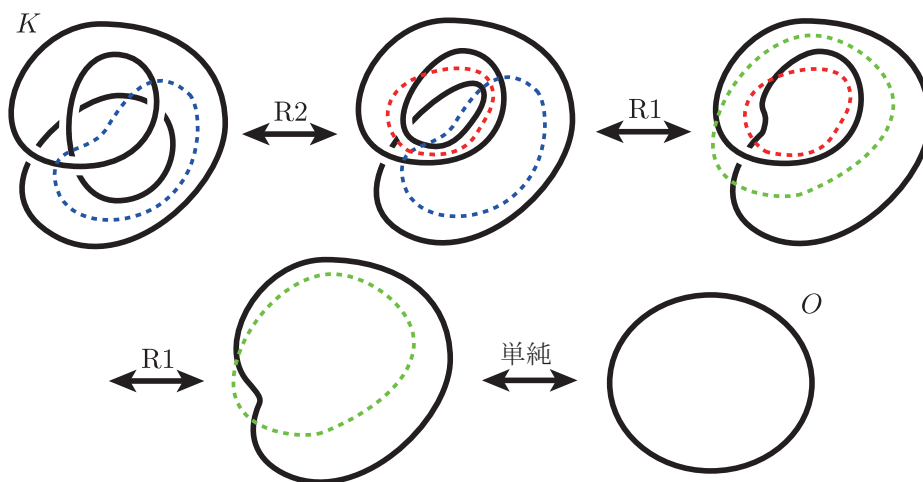


図 1.7

例 2.1. 図 2.1 は, 一つの 2 成分絡み目 L に対する, $2^2 = 4$ 通りの向きの付け方を表す.

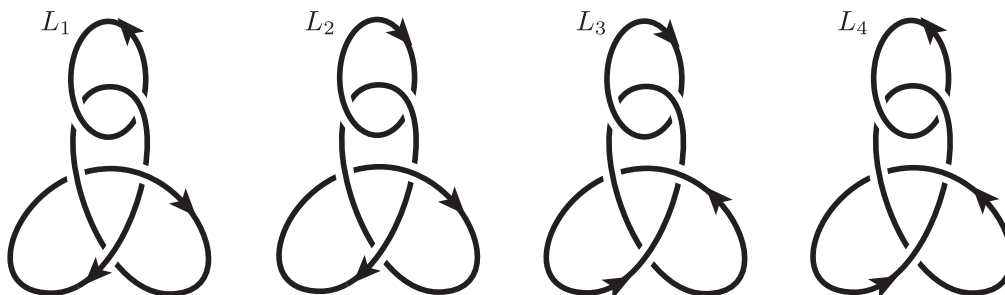


図 2.1

2 つの有向絡み目 L, L' が有向同値であるとは, 向きを保ったまま, L を同値変形し, 有向絡み目として L' と一致させることができることをいう. こととき, $L \approx L'$ を表す. もちろん, $L \approx L'$ であれば, $L \cong L'$ であるが, 逆が成り立つとは限らない. 有向結び目 L のすべての成分の向きを逆にしたものを $-L$ と表す. 例 2.1 の場合は, $L_1 = -L_3, L_2 = -L_4$ が成り立つ. 有向絡み目 L は, $L \approx -L$ が成り立つとき, 可逆的であるという. 例えば, 自明な結び目, 三葉結び目, 8 の字結び目などは可逆的である. これは, 結び目をそれ自身に移すような 180° 回転があることを使って証明できる.

例 2.2. 図 2.2 より, 8 の字結び目 K_{F8} に対し, $K_{F8} \approx -K_{F8}$ であることが分かる.

定義 2.3 (絡み数). $L = K_1 \cup K_2$ を 2 成分有向絡み目とし, q_1, \dots, q_n を K_1 と K_2 の全ての交差点とする. ただしここでは, K_1 どうし K_2 どうしの交差点は考えない. 各交差点 q_i に対し, 次の規則に従って $+1, -1$ のいずれかの符号 $\varepsilon(q_i)$ を対応させる. このとき, $\varepsilon(q_1), \dots, \varepsilon(q_n)$ の総和の半分を, L の絡み数といい, これを, $\text{lk}(L)$ または $\text{lk}(K_1, K_2), \text{lk}(K_2, K_1)$ で表す. すなわち, L の絡み数を次で定義する.

$$\text{lk}(L) = \text{lk}(K_1, K_2) = \text{lk}(K_2, K_1) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \varepsilon(q_i) = \frac{1}{2} (\varepsilon(q_1) + \dots + \varepsilon(q_n)) \quad (2.1)$$

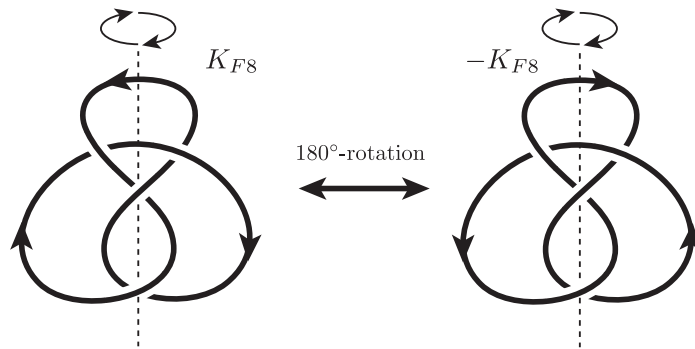


図 2.2

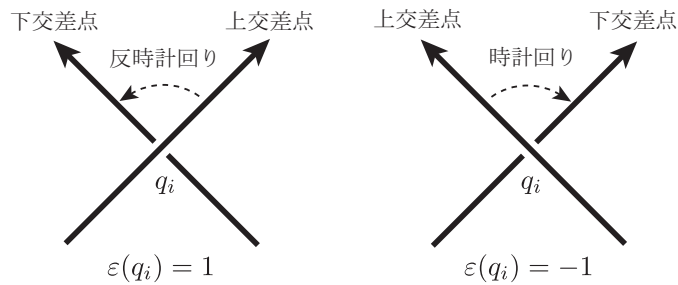


図 2.3

K_1 と K_2 の交差点の個数は偶数個なので, $\text{lk}(K_1, K_2)$ は整数である.

例 2.4. 図 2.4 の L_1, L_2 はホップ絡み目に異なる向きをつけたものである. 一方, L_3 は有向ホワイトヘッド絡み目である. L_1 においては, $\varepsilon(q_1) = \varepsilon(q_2) = +1$ であるから, $\text{lk}(L_1) = \frac{1}{2}(1+1) = 1$ である.

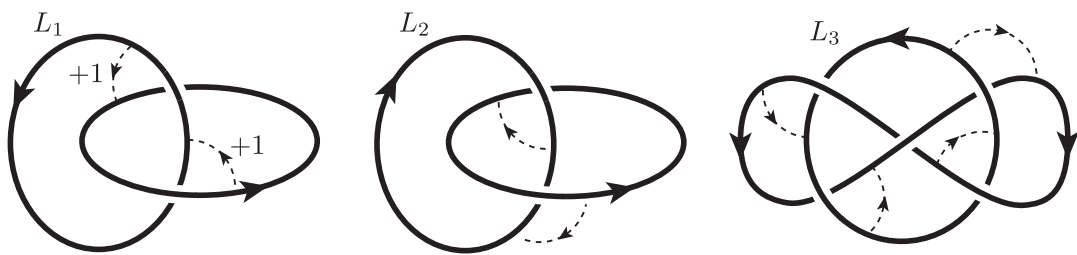


図 2.4

問題 2.1. $\text{lk}(L_2) = -1, \text{lk}(L_3) = 0$ であることを示せ.

定理 2.5. 有向絡み目 $L = K_1 \cup K_2$ と $L' = K'_1 \cup K'_2$ が有向同値であるとき, $\text{lk}(K_1, K_2) = \text{lk}(K'_1, K'_2)$ が成り立つ. すなわち,

$$L \approx L' \implies \text{lk}(K_1, K_2) = \text{lk}(K'_1, K'_2)$$

が成り立つ.

証明. $L \approx L'$ であるから, 同値定理 (定理 1.2) より, L' は, L より有限回の向きを保存する単純変形と基本変形で得られる. 単純変形で, 交差点の状況は変化しないので, 絡み数は不変である. したがって, L' は L より, 有限回の基本変形 R1, R2, R3 を使って得ることができる. すなわち,

$$L = L_0 \xleftrightarrow{\text{R1, R2 or R3}} L_1 \xleftrightarrow{\text{R1, R2 or R3}} \dots \xleftrightarrow{\text{R1, R2 or R3}} L_{n-1} \xleftrightarrow{\text{R1, R2 or R3}} L_n = L'$$

が成り立つ. したがって, それぞれの基本変形で絡み数が不変であることを示せばよい.

R1: $L_i \xleftrightarrow{\text{R1}} L_{i+1}$ の場合. 図 2.5 ような状況を考える. このとき, q は L_i の同じ成分のどうしの交差点であるから, 絡み数の定義 (2.1) における総和の対象となる交差点ではない. また, スポットの外側では, L_i と L_{i+1} の状況は不変であるから, $\text{lk}(L_i) = \text{lk}(L_{i+1})$ が成り立つ.

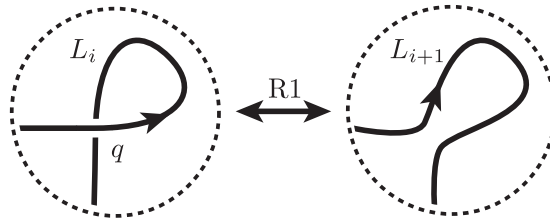


図 2.5

R2: $L_i \xleftrightarrow{\text{R2}} L_{i+1}$ の場合. スポット内に現れている 2 辺が L_i の同じ成分のとき, R1 変形の場合と同様 $\text{lk}(L_i) = \text{lk}(L_{i+1})$ が成り立つので, 2 辺は L の異なる成分に含まれるとしてよい. 図 2.6 のような状況を考える. q_1, q_2 は L_{i+1} には含まれない L_i の交差点であるから, $\text{lk}(L_i) - \text{lk}(L_{i+1}) = \frac{1}{2}(\varepsilon(q_1) + \varepsilon(q_2))$

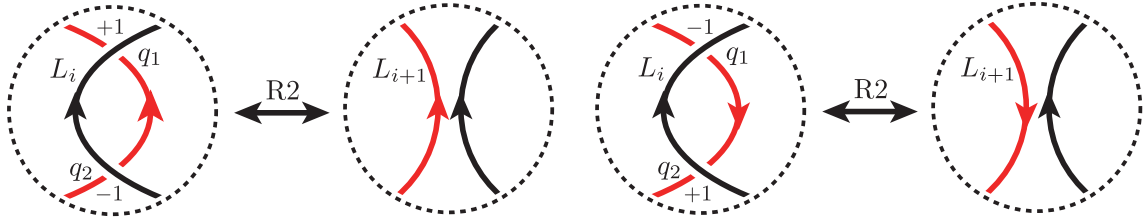


図 2.6

が成り立つ. 図 2.6 から分かるように, いずれの場合も $\varepsilon(q_1) + \varepsilon(q_2) = 0$ である. したがって, $\text{lk}(L_i) = \text{lk}(L_{i+1})$ が成り立つ.

R3: $L_i \xleftrightarrow{\text{R3}} L_{i+1}$ の場合. スポット内に現れる 3 辺が L_i の同じ成分であれば, R1 変形の場合と同様 $\text{lk}(L_i) = \text{lk}(L_{i+1})$ が成り立つ. よって, 2 辺は K_1 に含まれ, 1 辺は K_2 に含まれるとしてよい. 図 2.7 のような状況を考える. 3 辺の向きの付け方は, $2^3 = 8$ 通りあるが, いずれの場合も $\varepsilon(q_1) = \varepsilon(q'_1)$, $\varepsilon(q_2) = \varepsilon(q'_2)$ が成り立つ. したがって, $\text{lk}(L_i) = \text{lk}(L_{i+1})$ である.

以上の結果より, R1, R2, R3 のいずれの場合も $\text{lk}(L_i) = \text{lk}(L_{i+1})$ が成り立つことが分かった. よって,

$$\text{lk}(L) = \text{lk}(L_0) = \text{lk}(L_1) = \text{lk}(L_2) = \dots = \text{lk}(L_{n-1}) = \text{lk}(L_n) = \text{lk}(L')$$

となり, 証明が完成した. □

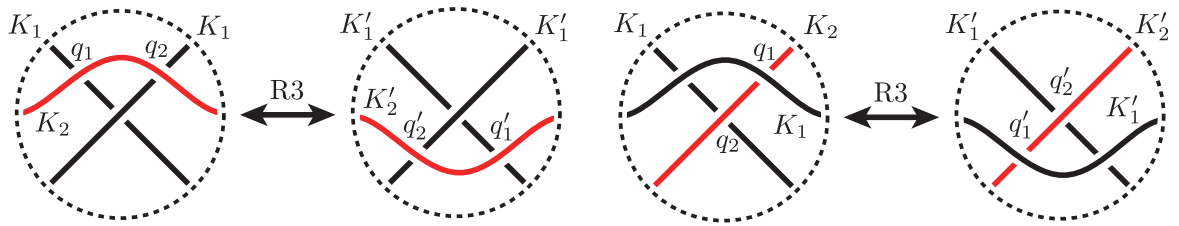


図 2.7

2 成分絡み目 $L = K_1 \cup K_2$ が分離可能であるとは、 L と同値な絡み目 $L' = K'_1 \cup K'_2$ で、 K'_1, K'_2 の射影図が交差しないものが存在することをいう。

系 2.6. 2 成分有向絡み目 L が分離可能であれば、 $\text{lk}(L) = 0$ である。

証明. 仮定より、 L と有向同値な絡み目 $L' = K'_1 \cup K'_2$ で、 K'_1 と K'_2 の射影図が交差しないものが存在する。絡み目の定義より、 $\text{lk}(L') = 0$ 。また、定理 2.5 より、 $\text{lk}(L) = \text{lk}(L')$ であるから、 $\text{lk}(L) = 0$ が成り立つ。□

注意 2.7. (1) 一般には、系 2.6 の逆は成立しない。問題 2.1 より、ホワイトヘッド絡み目の絡み数は 0 であるが、分離不可能であることは、問題 4.3 で明らかになる。

(2) 例 2.4 または 問題 2.1 より、ホップ絡み目の絡み数は 0 ではない。したがって、ホップ絡み目は分離不可能である。これは、注意 1.1 の最初の課題に対する数学的な解答である。

3 ジョーンズ多項式の定義と不変性

絡み目 L の各交差点 \diagdown を、 \diagup あるいは \diagdown に交換して得られる xy 平面内の単純閉曲線の和集合をステイトという。このような交差点の解消の仕方を、スムージングという。各交差点で 2 通りのスムージングがあるので、 L の交差点の個数が n 個であれば、 L は 2^n 個のステイトをもつ。図 3.1 において 2 個の単純閉曲線からなる図形 S は、 L のステイトの一つである。 L の交差点 \diagdown が、 S

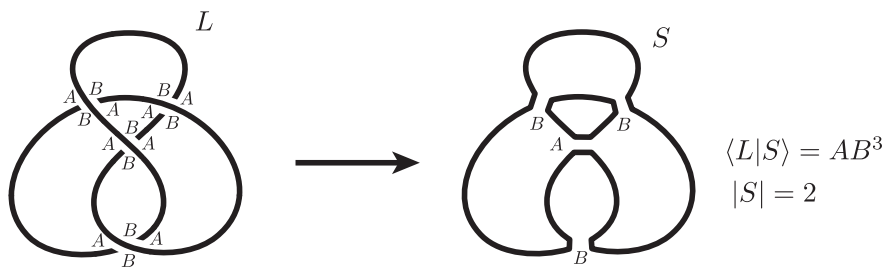


図 3.1

において \diagup になるとき、その点での S の重みを、 A とする。一方、 \diagdown になるときの重みを、 B とする。この重みの付け方は次の規則に従う。まず、交差点を通る 2 辺は、交差点の周辺を 4 つの領域に分ける。上交差点を通る辺を反時計回りに回して下交差点を通る辺に重ねるとき、移動する

領域に A のラベルをつけ、他の 2 領域には B のラベルをつける (図 3.2 参照) . 交差点におけるスムージングで、 A 領域がつながるとき、その点での重みを A とする . 一方、 B 領域がつながるとき、その点での重みを B とする . L の全ての交差点での S の重みの積を $\langle L|S \rangle$ で表し、 S の重みという .

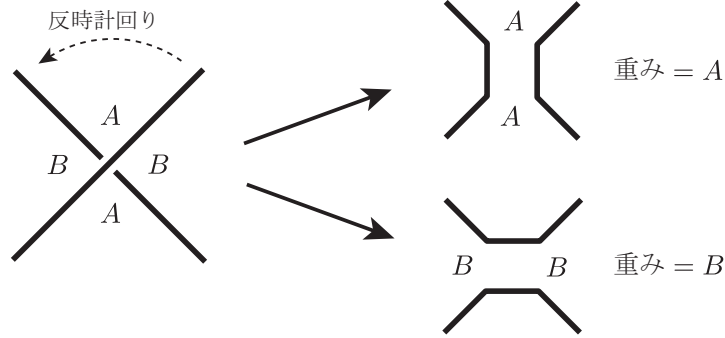


図 3.2

例えば、図 3.1 の状態 S では、 L の 4 つの交差点での重みは、 A が 1 個、 B が 3 個である . したがって、 S の重みは $\langle L|S \rangle = AB^3$ である . 一方、状態 S は単純閉曲線の和集合であるが、その成分数を $|S|$ で表す . よって、図 3.1 の状態 S では、 $|S| = 2$ となる .

定義 3.1 (ブラケット多項式). S_1, \dots, S_m を L の状態の全体とする . 特に、 L の交差点数が n のとき、 $m = 2^n$ である . また、 d を (現時点では) A, B と独立な変数とする . このとき、次の等式で定義される A, B, d を変数にもつ多項式を、 L のブラケット多項式という .

$$\langle L \rangle = \sum_{i=1}^m \langle L|S_i \rangle d^{|S_i|-1} = \langle L|S_1 \rangle d^{|S_1|-1} + \langle L|S_2 \rangle d^{|S_2|-1} + \dots + \langle L|S_m \rangle d^{|S_m|-1}$$

例 3.2. 三葉結び目 K_{TR} のブラケット多項式を求める . K_{TR} の交点数は 3 であるから、状態の個数は $2^3 = 8$ 個である . 図 3.3 より、各状態の重みと成分数は次の表にまとめられる .

	①	②	③	$\langle K S_i \rangle$	$ S_i $
S_1	A	A	A	A^3	3
S_2	A	A	B	A^2B	2
S_3	A	B	A	A^2B	2
S_4	A	B	B	AB^2	1
S_5	B	A	A	A^2B	2
S_6	B	A	B	AB^2	1
S_7	B	B	A	AB^2	1
S_8	B	B	B	B^3	2

したがって定義 3.1 より、次が得られる .

$$\begin{aligned} \langle K_{TR} \rangle &= \langle K_{TR}|S_1 \rangle d^{|S_1|-1} + \langle K_{TR}|S_2 \rangle d^{|S_2|-1} + \dots + \langle K_{TR}|S_7 \rangle d^{|S_7|-1} + \langle K_{TR}|S_8 \rangle d^{|S_8|-1} \\ &= A^3 d^2 + A^2 B d + A^2 B d + AB^2 + A^2 B d + AB^2 + AB^2 + B^3 d \\ &= A^3 d^2 + 3A^2 B d + 3AB^2 + B^3 d \end{aligned}$$

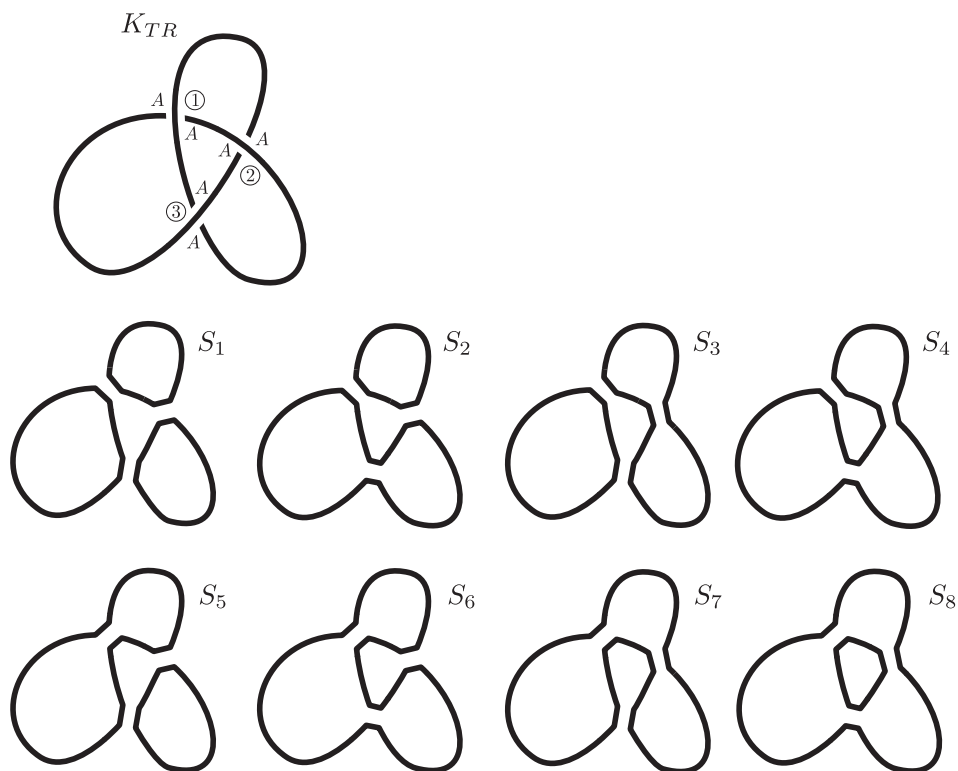


図 3.3

補題 3.3. O を平面内の単純閉曲線, L をその射影が O と交わらない絡み目とする. このとき, 次の等式が成り立つ.

$$(1) \langle \bigcirc \rangle = 1 \quad (2) \langle L \cup O \rangle = d \langle L \rangle \quad (3) \langle \begin{array}{c} \diagup \\ \diagdown \end{array} \rangle = A \langle \rangle \langle \rangle + B \langle \begin{array}{c} \diagdown \\ \diagup \end{array} \rangle$$

ただし, $\langle \rangle$ の中は, 正則図式の一部にスポットをあてたものであり, スポットの外側では, 3 つの正則図式は完全に一致しているとする. また, $L \cup O$ は L と O を併せた絡み目を表す.

講義で, 補題 3.3 の証明をする.

明らかに, $\langle L \rangle$ は単純変形のもとで不変である. そこで, 基本変形のもとで, $\langle L \rangle$ がどのように変化するかをみる.

補題 3.4. 次の等式が成り立つ.

$$\langle \begin{array}{c} \diagup \\ \diagdown \end{array} \rangle = AB \langle \rangle \langle \rangle + (ABd + A^2 + B^2) \langle \begin{array}{c} \diagdown \\ \diagup \end{array} \rangle$$

特に, $AB = 1, d = -A^2 - A^{-2}$ とすると, $\langle \begin{array}{c} \diagup \\ \diagdown \end{array} \rangle = \langle \rangle \langle \rangle$ となる.

講義で, 補題 3.4 の証明をする.

補題 3.5. $B = A^{-1}, d = -A^2 - A^{-2}$ とおくと, 次の等式が成り立つ.

$$\langle \begin{array}{c} \diagup \\ \diagdown \end{array} \rangle = \langle \begin{array}{c} \diagdown \\ \diagup \end{array} \rangle$$

講義で，補題 3.5 の証明をする．

補題 3.4, 3.5 は， $B = A^{-1}$, $d = -A^2 - A^{-2}$ のとき，ブラケット多項式が R2, R3 変形で不変なことを示している．明らかに，ブラケット多項式は単純変形に関し不変であるから，もし R1 変形でも不変であれば，定理 2.5 の証明と同様の議論を使って，絡み目の不変量であることが示せる．しかし，次の補題で示すように，ブラケット多項式は R1 変形で不変ではない．

補題 3.6. $B = A^{-1}$, $d = -A^2 - A^{-2}$ とおくと，次の等式が成り立つ．

$$\langle \delta \rangle = (-A^3) \langle \cup \rangle \quad \langle \delta \rangle = (-A^{-3}) \langle \cup \rangle$$

講義で，補題 3.6 の証明をする．

L を有向絡み目とし， q_1, \dots, q_n を L の交差点の全体とする．このとき，各交差点 q_i における符号 $\varepsilon(q_i)$ の和をねじれ数といい，これを $w(L)$ と表す．すなわち，

$$w(L) = \varepsilon(q_1) + \varepsilon(q_2) + \dots + \varepsilon(q_n)$$

である．

問題 3.1. L_3 を，図 2.4 のホワイトヘッド絡み目とする．このとき， $w(L_3) = 1$ であることを示せ．

絡み数の場合とは異なり，ねじれ数のときは，同じ成分どうしの交差点の符号も考えることに注意せよ．

補題 3.7. 有向絡み目のねじれ数に関し，次の等式が成り立つ．

$$\begin{aligned} w(\delta) &= w(\cup) + 1 & w(\delta) &= w(\cup) - 1 \\ w(\delta) &= w(\cup) & w(\delta) &= w(\cup) \end{aligned}$$

補題 3.7 より，有向絡み目のねじれ数は，R2, R3 変形に関しては不変であるが，R1 変形に関しては不変ではないことが分かる．これは，ブラケット多項式の特徴と似ている．そこで，ブラケット多項式とねじれ数を組み合わせ，R1 変形による変化を相殺することによって，有向絡み目の不変量が定義できることが期待される．

有向絡み目 L に対し，

$$f(L) = (-A)^{-3w(L)} \langle L \rangle \tag{3.1}$$

とおくとき，次の定理が成り立つ．

定理 3.8. 有向絡み目 L , L' が有向同値であれば， $f(L) = f(L')$ が成り立つ．すなわち， $f(L)$ は有向絡み目の不変量である．

証明. ブラケット多項式，ねじれ数は絡み目の単純変形に関しては不変であるので， $f(L)$ も不変である．さらに， $f(L)$ が基本変形に関して不変であることを示そう．補題 3.4, 3.5 より，ブラケット多項式 $\langle L \rangle$ は R2, R3 変形に関して不変である．一方，補題 3.7 より，ねじれ数 $w(L)$ も R2, R3 変形に関して不変である．したがって， $f(L)$ も R2, R3 変形に関して不変である．一方，補題 3.6, 3.7 より，

$$\begin{aligned} f(\delta) &\stackrel{(3.1)}{=} (-A)^{-3w(\delta)} \langle \delta \rangle \stackrel{\text{補題 3.6, 3.7}}{=} (-A)^{-3w(\cup)-3} (-A)^3 \langle \cup \rangle \\ &= (-A)^{-3w(\cup)} \langle \cup \rangle \stackrel{(3.1)}{=} f(\cup) \end{aligned}$$

となる．同様に， $f(\text{図}) = f(\text{図})$ が成り立つ．したがって， $f(L)$ は R1 変形でも不変である．

同値定理 (定理 1.2) より， L' は， L より有限回の向きを保存する単純変形と基本変形で得られる．単純変形で $f(L)$ は不変であるから， L' は L より，有限回の基本変形 R1, R2, R3 を使って得られると仮定する．すなわち，

$$L = L_0 \xleftrightarrow{\text{R1, R2 or R3}} L_1 \xleftrightarrow{\text{R1, R2 or R3}} \cdots \xleftrightarrow{\text{R1, R2 or R3}} L_{n-1} \xleftrightarrow{\text{R1, R2 or R3}} L_n = L'$$

とする．上で示したように， $i = 0, 1, \dots, n-1$ において， $f(L_i) = f(L_{i+1})$ であるから，

$$f(L) = f(L_0) = f(L_1) = f(L_2) = \cdots = f(L_{n-1}) = f(L_n) = f(L')$$

となり，証明が完成した． □

問題 3.2. $f(L) = f(-L)$ を示せ．

ヒント： $\langle L \rangle$ は向きには無関係に定義されるので， $\langle L \rangle = \langle -L \rangle$ である． L の各交差点 q において， L に関する符号と $-L$ に関する符号は一致する．すなわち， $\varepsilon_L(q) = \varepsilon_{-L}(q)$ ．

定理 3.9. K, K' を有向結び目とする．もし K と K' が同値であれば， $f(K) = f(K')$ が成り立つ．すなわち， $f(K)$ は (向きを考えない) 結び目の不変量である．

証明. K と K' が同値であるとする．このとき， $K \approx K'$ ， $K \approx -K'$ のいずれかが起こる． $K \approx K'$ のとき，定理 3.8 より， $f(K) = f(K')$ である．一方， $K \approx -K'$ のときは， $f(K) = f(-K')$ であるが，問題 3.2 より， $f(-K') = f(K')$ であるから， $f(K) = f(K')$ が成り立つ． □

定義 3.10 (ジョーンズ多項式). L を有向絡み目とするととき， $f(L)$ の変数 A に， $t^{-\frac{1}{4}}$ を代入した， t に関する多項式 $V_L(t)$ を L のジョーンズ多項式という．すなわち

$$V_L(t) = f(L)(t^{-\frac{1}{4}}). \tag{3.2}$$

定理 3.11. ジョーンズ多項式は，次の性質をもつ．

(J1) L と L' が有向同値な有向絡み目であるとき， $V_L(t) = V_{L'}(t)$ ．すなわち，ジョーンズ多項式は，有向絡み目の不変量である．

(J2) O を自明な結び目とするととき， $V_O(t) = 1$ ．

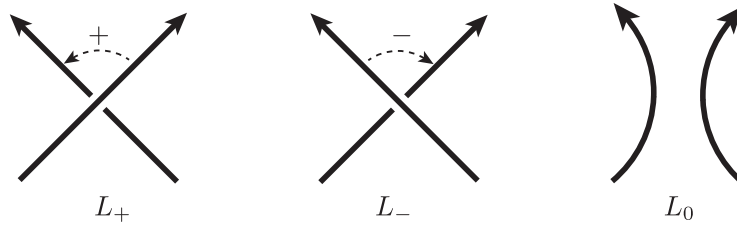
(J3)

$$t^{-1}V_{L_+}(t) - tV_{L_-}(t) = \left(\sqrt{t} - \frac{1}{\sqrt{t}}\right)V_{L_0}(t).$$

ただし L_+, L_-, L_0 は，あるスUPPORTの内側では次の図のような状態にあり，スUPPORTの外側では完全に一致しているとする．

定理 3.8 より，(J1) が成り立つのは明らかである．(J2) も，補題 3.3 を使って，容易に証明できる．(J3) の関係式は，スケイン関係式とよばれ，ジョーンズ多項式を計算する上で非常に有効である．

講義で，スケイン関係式 (J3) の証明をする．



4 ジョーンズ多項式の結び目・絡み目への応用

この節では、有向絡み目のジョーンズ多項式を実際に計算し、それを使って絡み目の性質を明らかにしていく。ジョーンズ多項式を定義通り計算するには、ブラケット多項式を計算する必要がある。しかし、絡み目の交点数が大きいとき、それは大変な作業である。例えば、絡み目 L の交点数が 6 であると、 L の状態の個数は $2^6 = 64$ 個ある。したがって、ブラケット多項式 $\langle L \rangle$ は、64 項を持つ多項式となる。

ここでは、ジョーンズ多項式を、その定義には戻らずにスケイン関係式 (J3) を使って直接計算する方法を与える。以下では、 L, L_+, L_-, L_0 等は、つねに有向絡み目を表すとする。さらに、 L_+, L_-, L_0 は、定理 3.11 (J3) の状態にあるとする。

補題 4.1. L が n 成分の自明な絡み目であるとき、 $V_L(t) = d^{n-1}$ が成り立つ。ただし、

$$d = -\sqrt{t} - \frac{1}{\sqrt{t}} \quad (4.1)$$

とする。

講義で、補題 4.1 の証明をする。

スケイン関係 (J3) は

$$t^{-1}V_{L_+}(t) - tV_{L_-}(t) = zV_{L_0}(t)$$

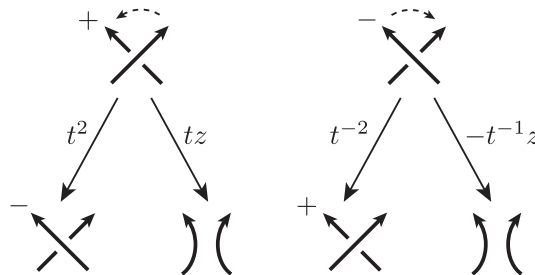
である。ただし、

$$z = \sqrt{t} - \frac{1}{\sqrt{t}} \quad (4.2)$$

とする。この式を書き直すと、

$$V_{L_+}(t) = t^2V_{L_-}(t) + tzV_{L_0}(t), \quad V_{L_-}(t) = t^{-2}V_{L_+}(t) - t^{-1}zV_{L_0}(t)$$

が得られる。この関係式を、以下のように図式化して表す。



例 4.2. 三葉結び目 K_{TR} のジョーンズ多項式を計算する．定理 3.9 で示したように，ジョーンズ多項式は， K_{TR} の向き付け方に依存しない．図 4.1 は， K_{TR} のスケイン関係を図式化したものである．これより，

$$\begin{aligned} V_{K_{TR}}(t) &= t^{-2}V_O(t) - t^{-1}z(t^{-2}V_{O_2}(t) - t^{-1}zV_O(t)) \\ &= t^{-2} \cdot 1 - t^{-1}z(t^{-2} \cdot d - t^{-1}z \cdot 1) = -t^{-4} + t^{-3} + t^{-1} \end{aligned}$$

となる．式の最後では，(4.1), (4.2) を使って， d, z を t の関数に置き直した． $V_O(t) = 1$ であるから， $V_{K_{TR}}(t) \neq V_O(t)$ である．したがって，定理 3.11 (J1) より， K_{TR} は O に同値ではない．これで，三葉結び目がほどけないことが，数学的に証明された．

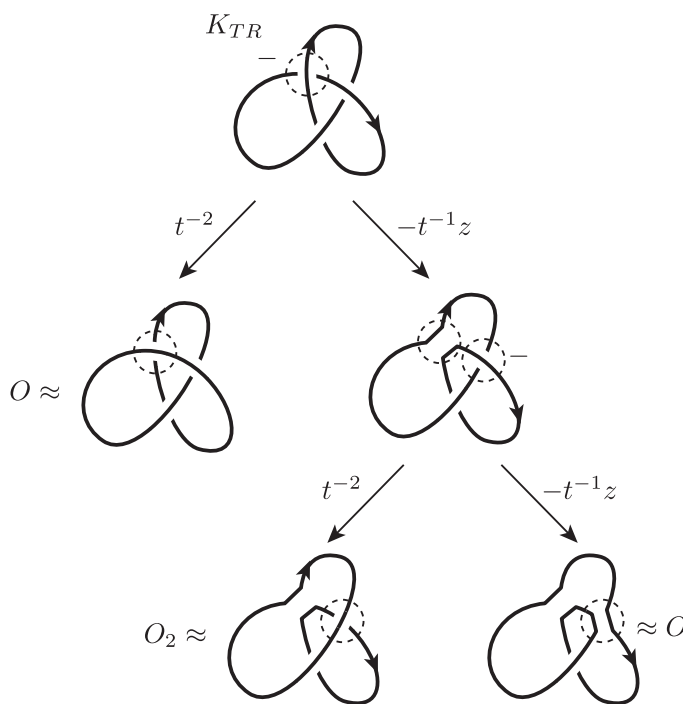


図 4.1

問題 4.1. 8 の字結び目 K_{F8} のスケイン図式 (図 4.2) を利用して， $V_{K_{F8}}(t) = t^{-2} - t^{-1} + 1 - t + t^2$ であることを示せ．したがって，特に 8 の字結び目は自明ではない．

例 4.2 と問題 4.1 より， $V_{K_{TR}}(t) \neq V_{F8}(t)$ であるから， K_{TR} と K_{F8} は同値ではない．

絡み目 L の正則図式における全ての交差点で，上下関係を入れ替えてできた正則図式をもつ絡み目を L の鏡映といい，これを L^* と表す．p. 2, 図 1.3 の K_{TR}^* は，三葉結び目 K_{TR} の鏡映である．絡み目 L は，その鏡映 L^* と同値であるときもろて型 (achiral or amphicheiral) という．

例 4.3. 8 の字結び目 K_{F8} はもろて型である．すなわち， $K_{F8} \cong K_{F8}^*$ が成り立つ．実際，図 4.3 は， K_{F8} が K_{F8}^* から単純変形と基本変形の繰り返しで得られることを示している．

命題 4.4. 結び目 K がもろて型であるとき (K の任意の向き付けに対し) $V_K(t) = V_{K^*}(t)$ が成り立つ．

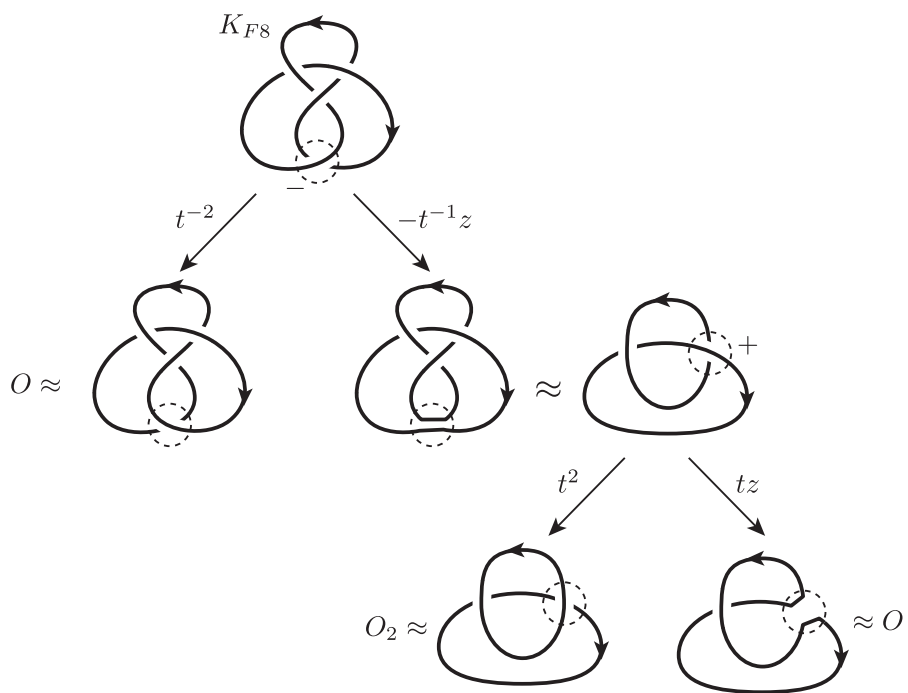


図 4.2

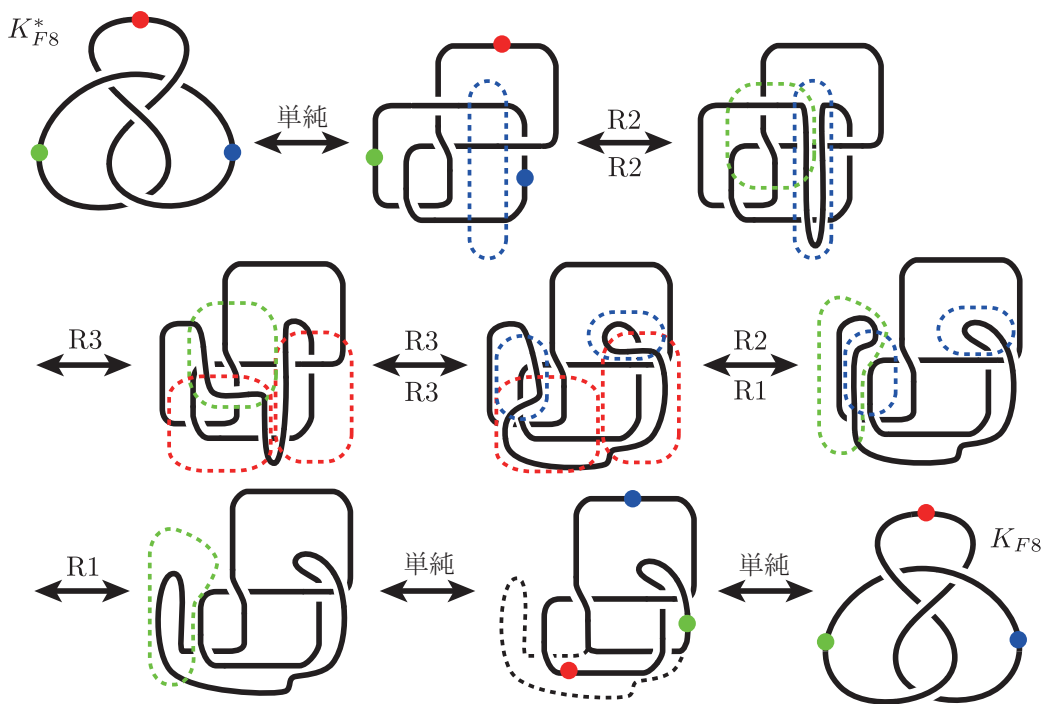


図 4.3

問題 4.2. 左手型三葉結び目 K_{KT} の鏡映 (右手型三葉結び目) K_{TR}^* のジョーンズ多項式は, $V_{K_{TR}^*}(t) = -t^4 + t^3 + t$ であることを示せ. その結果を利用して, K_{TR} はもろて型ではない, すなわち K_{TR} と K_{TR}^* は同値でないことを示せ.

ヒント: K_{TR} のスケイン関係式 (図 4.1) の, 鏡映が K_{TR}^* のスケイン関係式となる. このとき, 交差点の符号は「-」から「+」に変わること注意到せよ.

例 4.5. 図 4.4 は, ホワイトヘッド絡み目 L_{WH} (図 2.4: L_3) のスケイン関係を表している. これより,

$$\begin{aligned} V_{L_{WH}}(t) &= t^2(t^{-2}V_{O_2}(t) - t^{-1}zV_O(t)) + tzV_{K_{F8}}(t) \\ &= t^2(t^{-2}d - t^{-1}z) + tz(t^{-2} - t^{-1} + 1 - t + t^2) = t^{\frac{7}{2}} - 2t^{\frac{5}{2}} + t^{\frac{3}{2}} - 2t^{\frac{1}{2}} + t^{-\frac{1}{2}} - t^{-\frac{3}{2}} \\ &= t^{-\frac{3}{2}}(t^5 - 2t^4 + t^3 - 2t^2 + t - 1) \end{aligned}$$

となる.

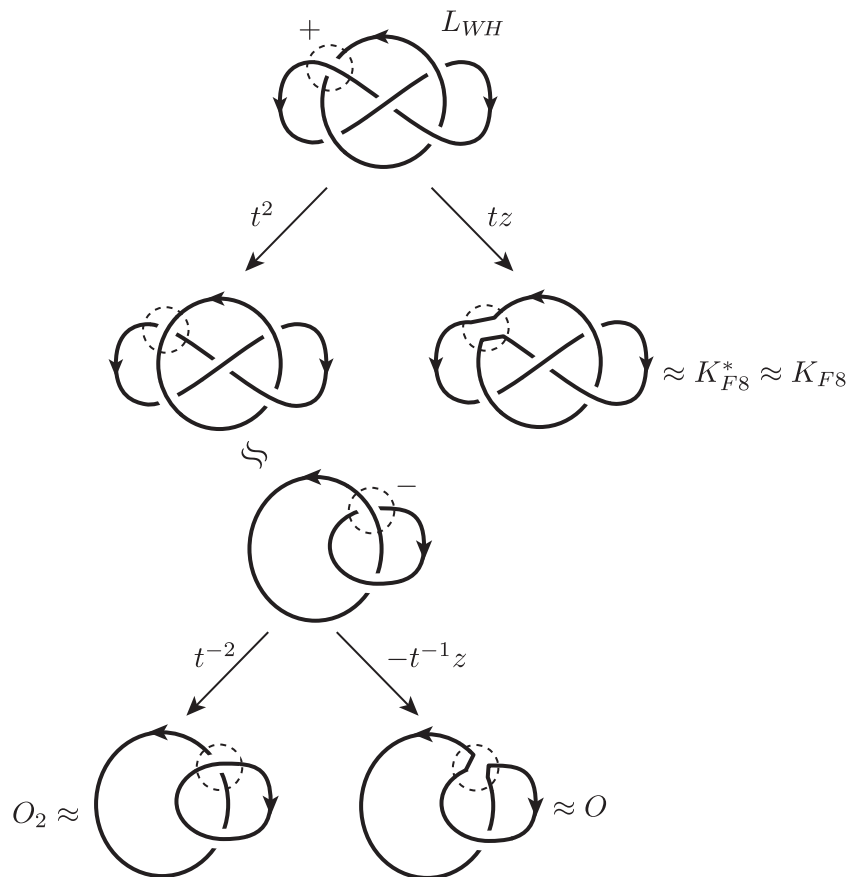


図 4.4

問題 4.3. 例 4.5 の結果を使って, ホワイトヘッド絡み目 L_{WH} は分離不可能であることを示せ.
 ヒント: 背理法を使う. ホワイトヘッド絡み目の各成分は自明な結び目であるから, もし仮に L_{WH} が分離可能とするならば, 図 4.5 から分かるように, $L_{WH} \approx O_2$ となるはずである. したがって, $V_{L_{WH}}(t) = V_{O_2}(t)$ となるはずである.

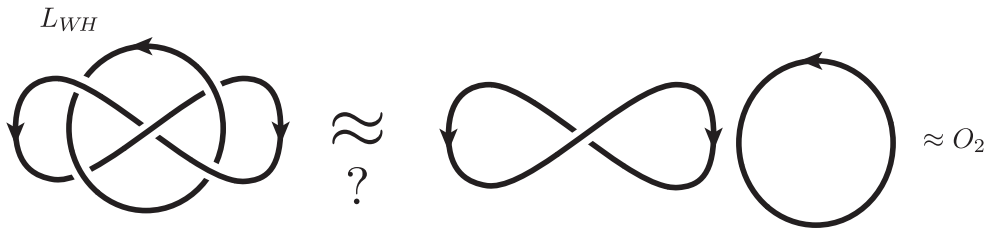


図 4.5